Teoria dei Numeri - ARITMETICA
mercoledì 14 ottobre 2015

Problema 1. *(Olimpiadi Matematica Messico)* –
Sia n un numero intero positivo, con $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$ dove per ogni $i=1,\ldots,k$, d_i sono divisori di n e $k\geq 3$. Determinare la somma di tutti gli n tali che $\boldsymbol{n=d_2^2+d_3^3}$.

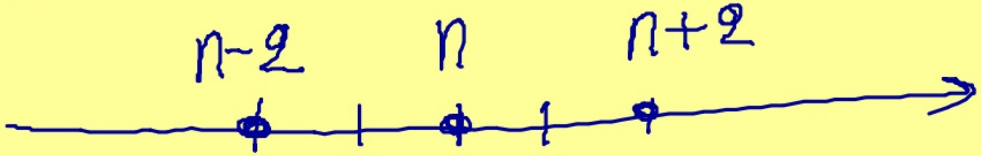
- se d_2, d_3 dispari $\longrightarrow$ n pari $\lightning$
- d_2 pari ($d_2=2$) e d_3 disp. $\longrightarrow$ n disp. $\lightning$
- d_3 pari e d_2 disp. $\longrightarrow$ $d_2 = 2$ $\lightning$
- d_2, d_3 pari $\longrightarrow$ $d_2=2 \wedge d_3=4$

$$\text{pari} = 2k$$

$$n=4+64=68$$

Problema 2. Quanti sono gli interi *n* con $1 \le n \le 1000$ tali che $\boldsymbol{144 \mid (n^3 - 4n)}$?

$$\underline{n(n+2)(n-2)} = A \qquad 144 = 2^4 \cdot 3^2$$



$\underline{n \text{ pari}}$ $\quad 8 \mid A$

$\forall n$ pari $2^4 \mid A$

$\forall n$ $\quad 3 \mid A$

111 multipli di 9

$\downarrow$

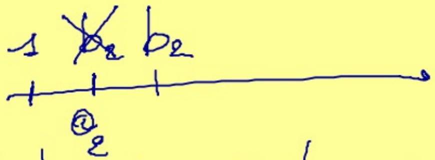
55 pari

$$1 + 3 \cdot 55 = 166$$

$\downarrow$

$n = 2$

Problema 3. Date $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni aritmetiche a termini interi tali che $\boldsymbol{a_1=b_1=1}$ e $\boldsymbol{1<a_2\le b_2}$. Per qualche x intero positivo si ha $\boldsymbol{a_x \cdot b_x=2010}$. 8
Determinare qual è il più grande valore possibile di x e, in tal caso, determinare le rispettive ragioni aritmetiche.



$2010 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 67^1$

$d(2010) = 2^4 = 16$

a_x	b_x	$a_x - 1$	$b_x - 1$
30	67	29	66
~~1~~	~~2010~~		
2	1005	1	1004
3	670	2	669
5	402	4	401
6	335	5	334
10	201	9	200
15	134	14	133

$133 \longrightarrow x-1=7 \longrightarrow x=8$

$a_8 = 15$

$a_8 = 1 + 7d_A \longrightarrow 7d_A = 14 \longrightarrow d_A = 2$

$b_8 = 1 + 7d_B \longrightarrow 7d_B = 133 \longrightarrow d_B = 19$

a_1 , d_A

$$a_x = a_1 + (x-1)\,d_A \longrightarrow a_x - 1 = (x-1)\,d_A$$

$$b_x = b_1 + (x-1)\,d_B \longrightarrow b_x - 1 = (x-1)\,d_B$$

$$(x-1) \mid a_x - 1$$

$$(x-1) \mid b_x - 1$$

$n \in \mathbb{N}^+$

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha^k + 1).$$

$$d(-12) = 2 \cdot d(12) = 2\underbrace{(3 \cdot 2)} = 12$$

n è quadrato

$$\Downarrow$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ pari

$$\Downarrow$$

$d(n)$ è DISPARI

Problema 4. (GaS Campigotto G3/*Pb.2*) Quanti giorni in un anno hanno il proprio numero che divide quello del mese cui appartengono?

G	F	M	A	M	G	L	A
1	2	2	3	2	4	2	4

S	O	N	D
3	4	2	6

Problema 5. Per quanti numeri interi x, si ha che
(x – 7)|(x³ – 7)?

$$x^3-7=(x^3-7^3)+7^3-7=$$

$$=\underbrace{(x-7)(x^2+7x+49)}+336$$

$x-7 \mid x^3-7$ se $x-7 \mid 336$

$$336=7\cdot 3\cdot 2^4$$

$d(336)=2\cdot 2\cdot 5=20$ posit.

$+20$ neg.

Sol.: 40

12. NUMERI PERFETTI

Un numero n viene detto perfetto se la somma di tutti i suoi divisori (n escluso) fa esattamente n. Quanto vale la somma dei reciproci di tutti i divisori dei primi dieci numeri perfetti?

FUNZIONE di EULERO

$\varphi: \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}^+$

$$\varphi(n) = \left| \left\{ a \in \mathbb{N}^+ : \underbrace{MCD(a;n) = 1}_{a,n \text{ coprimi}} \right\} \right| \quad a \leq n$$

$\boxed{p \text{ primo}}$

$\boxed{\varphi(p) = p - 1}$

$\boxed{\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}}$

$\varphi(2^4) = 16 - 8 = 8$

$\varphi(25) = 25 - 5$

$\boxed{\text{se } a, b \text{ coprimi}}$

$\boxed{\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)}$

$$\varphi(\underset{\substack{\downarrow \\ 2^4 \cdot 5^2}}{400}) = \varphi(2^4) \cdot \varphi(5^2) = (2^4 - 2^3) \cdot (5^2 - 5) = 8 \cdot 20 = 160$$

$$\varphi(\underset{\substack{\downarrow \\ 2 \cdot 5^3}}{250}) = \varphi(2) \cdot \varphi(5^3) = 1 \cdot (125 - 25) = 100$$

$$\varphi(273) = \varphi(3) \cdot \varphi(7) \cdot \varphi(13) = 2 \cdot 6 \cdot 12 = 144$$

Problema 7. (GaS medie 7/10/15 – Pb.16) Quanti sono i numeri interi positivi minori di 250 che non hanno divisori in comune con 250? E con 260? E con 273?

Cerchiamo gli n tali che

n è relativamente primo a 250

$$MCD(n;250)=1$$

n e 250 si dicono <u>COPRIMI</u>

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11									20
21									30
⋮									
241									250
251									260

Problema 8. (*Cesenatico 2002 – Pb.1*) Determinare tutti i numeri naturali di tre cifre che sono uguali a 34 volte la somma delle loro cifre.

$$N = \overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$$

$$0 \leq b, c \leq 9$$

$$1 \leq a \leq 9$$

Problema 9. (Br) Trovare tutti i numeri primi p tali che ***17p+1*** è un quadrato perfetto.

$17p+1 = x^2$ con $x \in \mathbb{Z}$

$17p = x^2 - 1 \longrightarrow 17p = (x-1)(x+1)$

$17 = x-1 \wedge p = x+1 \longrightarrow p = 19$

opp...

$17 = x+1 \wedge p = x-1 \longrightarrow \cancel{p = 15}$

Problema 10. (*Cesenatico GaS – pb.23*) Quante sono le soluzioni (x;y), con x,y interi, dell’equazione
$x^2y^2 - 192xy + 5776 = 16x^2 + 25y^2$?

Problema 11. (*GaS Tor Vergata 2011 – pb.4*) Qual è il più grande intero positivo n tale che n^2 divide $\boldsymbol{123246124^2 - 123246122^2}$?

Problema 12. *(Riadattamento Cesenatico 2004-Pb.3)* Determinare se $\boldsymbol{2015^{2016}}$ è somma di due quadrati perfetti.

Problema 13. Il numero $\boldsymbol{n = 2^{30} + 3^{30}}$ ha soltanto due fattori primi di due cifre. Determinarli.

Problema 14. (Cesenatico 2003 – Pb.1)
Determinare tutti i numeri naturali n di tre cifre che sono uguali alle ultime tre cifre del quadrato di n.