Teoria dei Numeri - ARITMETICA
mercoledì 4 novembre 2015

Problema 13. *(GaS nov2015)*

Qual è il più grande numero naturale che diviso per 200 dà come resto il triplo del cubo del quoziente?

$$\frac{N}{200} \dashrightarrow q, r \qquad \boxed{0 \leq r < 200}$$

$$N = 200q + r \qquad r = 3q^3$$

$$N = 200q + 3q^3 \longrightarrow 200 \cdot 4 + 3 \cdot 64 = 800 + 192 = 992$$

$$\frac{\cancel{3}q^3}{\cancel{3}} < \frac{200}{3} < \frac{201}{3} = 67$$

$$q^3 < 67$$

$$4^3 = 64 < 67$$

Problema 14. *(GaS nov2015 rivisto)*

- Quante sono tutte le coppie ordinate di numeri interi positivi il cui prodotto è 576? 21
- Tra esse, quante sono quelle formate da soli numeri pari? 15
- E da soli numeri dispari? 0

$$d(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1).$$

$$576 = 2^6 \cdot 3^2 = (2^3 \cdot 3)^2$$

$$d(576) = 7 \cdot 3 = 21$$

a	b
$2^{\alpha} \cdot 3^{\gamma}$	$2^{\beta} \cdot 3^{\delta}$

$\alpha, \beta = 1, \ldots 5$

Problema 15. *(GaS nov2015)*

Quali sono le ultime due cifre (decine e unità nell'ordine) del numero

$$1! + 2! + 3! + \ldots + 2015!$$

$$\underbrace{(1!+2!+3!+4!)}_{1+2+6+24} \equiv 3\boxed{3} \mod 100$$

$$5!+6!+7!+8!+9!$$

$$\ldots 20 \quad \ldots 20 \quad \ldots 40 \quad \ldots 20 \quad \ldots 80$$

$$20+20+40+20+80 \equiv \ldots 80$$

$$(80+33) \equiv 13 \mod 100$$

Problema 15.

- Quali sono le ultime due cifre (decine e unità nell'ordine) del numero

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ \ldots \ \cdot 2015!$$

- E quanti sono gli zeri con cui termina tale numero?

↳ Quanti sono i fattori 5 del num?

VALUTAZIONI p-ADICHE

Sia p primo, si definisce la funzione

$$v_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{tale che}$$

se $n \in \mathbb{Z}$

$$v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N} : p^k \mid n\}$$

$$v_p(0) = +\infty$$

se $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

$$v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b)$$

PROPR. $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$.

PROPRIETÀ

$$\boxed{v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor}$$

9!

$$v_5(9!) = \left\lfloor \frac{9}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{9}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{9}{5^3} \right\rfloor + \dots$$

$$= 1 + 0 + 0 + \dots$$

$$= 1$$

$$v_5(2015!) = \left\lfloor \frac{2015}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2015}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2015}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2015}{5^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2015}{5^5} \right\rfloor + \dots$$

$$= 403 + 80 + 16 + 3 + 0 + \dots$$

$$= 502$$

$$v_2(2015!) = 1007 + 503 + 251 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 =$$

13	**I CALCOLI DI MARCO** *Marco calcola il prodotto 2000x2001x2002x...x2050, (moltiplica cioè tra loro tutti i numeri dal 2000 al 2050 inclusi). Poi scompone in fattori primi il risultato. Nella scomposizione qual è l' esponente del fattore 2?*

$$2000 \cdot 2001 \cdot \ldots \cdot 2050 = \frac{2050!}{1999!}$$

$$v_2\left(\frac{2050!}{1999!}\right) = v_2(2050!) + - v_2(1999!)$$